

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 1

Hochschule Mannheim

Bildgebende System in der Medizin  
Elektrophysiologische Bildgebung (II)  
Dr. Friedrich Wetterling



Computer Assisted Clinical Medicine  
Faculty of Medicine Mannheim  
University of Heidelberg  
Theodor-Kutzer-Ufer 1-3  
D-68167 Mannheim, Germany  
Friedrich.Wetterling@MedMa.Uni-Heidelberg.de  
www.ma.uni-heidelberg.de/inst/cbtrn/ckm/

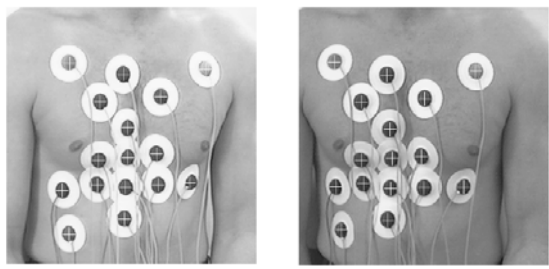
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 2

Übersicht

- 1) Detektoranordnungen
- 2) Rückwärtslösung: elektrisches Messsignal → Physiologische Aktivität (Position)
- 3) Lösungsansätze
- 4) Validierung aktueller Lösungsansätze an einem Torsophantom


RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 3

Mehrkanal EKG / EKG Bildgebung



RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 4

Mehrkanal EKG / EKG Bildgebung



256 Channel System at  
TU Tampere  
Prof. Jaakko Malmivuo  
Dr. Jari Hyttinen  
Tampere  
(with Marc Naibach,  
IBT Karlsruhe)

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 5

EKG-Bildgebung an einem Torsophantom

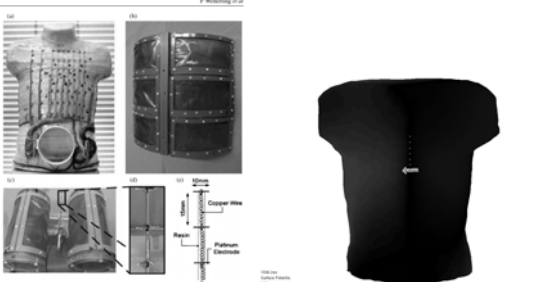


Figure 3. The heterogeneous physical torso phantom and the seven dipole centers. (a) The human-shaped torso phantom shown from the front with wired electrodes on the chest and a belt beneath, which gave measured signals. (b) The mesh component composed of six dielectric cylinders connected to an artificial chest bone. (c) The long components, cylindrical in shape were placed on the phantom inside, which was fixed to the inner back of the torso phantom. (d) The seven dipole centers were placed between the long components. Dipole numbers 1 to 7 of the seven dipoles were placed between the long components. Dipole numbers 1 to 3 of the seven dipoles were placed in the center of the torso phantom. Dipole numbers 4 to 7 of the seven dipoles were placed in the center of the torso phantom. The supply wires were insulated by an epoxy resin coating.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Wetterling  
6/20/2011 | Page 6

Oberflächenpotenzial für zwei Dipole mit variierenden Amplituden

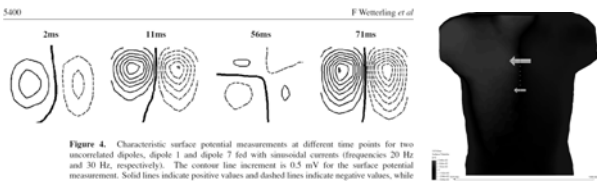


Figure 4. Characteristic surface potential measurements at different time points for two uncorrelated dipoles, dipole 1 and dipole 7 fed with sinusoidal currents (frequencies 20 Hz and 30 Hz, respectively). The contour line increment is 0.5 mV for the surface potential measurement. Solid lines indicate positive values and dashed lines indicate negative values, while the thick line represents the zero potential line. The measurement at 2 ms represents activity of dipole 7 only, at 11 ms activity of dipole 1 only, at 56 ms simultaneous activity of both dipoles with reversed orientations, and at 71 ms simultaneous activity of both dipoles with identical orientations. Differences between the signal magnitudes were due to differently deep positioned dipoles with respect to the electrode array.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 7

## Inverses Problem

Das bioelektrische inverse Problem beschreibt die Suche nach den Quellenparametern -Ort und Orientierung- aus den gemessenen Spannungswerten an der Oberfläche.

— Eingeleiteter Strom (Strom an Elektrode)  
— Stromdichteverteilung (Strom im Inneren)  
— Rekonstruiertes Äquivalent (Äquivalent)

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 8

## Inverses Problem: Mehrdeutigkeit

Allgemein ist es ein schlecht gestelltes Problem, da die Anzahl der Quellen unbekannt ist, und unendlich viele Quellenkonfigurationen die Messwerte erklären würden.

WMN Lokalisierungsergebnis für zwei unkorrelierte Dipole (Dp 1 mit 20Hz und Dp 7 mit 30Hz) zu einem Zeitpunkt an dem beide entgegengesetzte Orientierungen besaßen.

WMN Lokalisierungsergebnis für zwei unkorrelierte Dipole (Dp 1 mit 20Hz und Dp 7 mit 30Hz) zu einem Zeitpunkt an dem beide gleiche Orientierungen besaßen.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 9

## Inverses Problem: a-priori Information

Um das inverse Problem eindeutig lösen zu können, müssen daher zusätzliche, die mögliche Quellenanordnung beschränkende Informationen (a-priori) einbezogen werden.

1. Quellenmodell (Dipol, Flächenquelle, etc.)
2. Suchraum (z.B.: auf Herzmuskel beschränkt)
3. Richtung des Dipols (Strukturwissen über das Gewebe)

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 10

## Vorgehensweise

Darstellung des Suchprinzips. Die Messdaten werden mit den Vorwärtslösungen aller möglichen Quellenparameter verglichen. Die Vorwärtslösung basiert auf dem Quellen- und Volumenleitermodell.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 11

## Die elektrische Vorwärtslösung

Die Lösung der Poisson-Gleichung in einem unendlich ausgedehnten homogenen Medium,  $\varphi_\infty(\vec{r})$ , führt zu:

$$\varphi_\infty(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \vec{J}^i(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

Der Vektor  $\vec{r}'$  gibt den Quellpunkt an und  $\vec{r}$  den Feldpunkt.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 12

## Stückweise homogener Volumenleiter

Die Beziehungen zwischen stückweise homogen leitendem Volumenleiter und Sensorgeometrie. Die Variablen:

- $\vec{r}'$ : Koordinate des Dipols,
- $\vec{r}$ : Koordinate des Sensors,
- $\vec{n}$ : Normalenvektor zum Sensor,
- $\vec{Q}$ : Moment des Dipols,
- $G$ : gesamter Leitfähigkeitsraum,
- $G_1$ : Leitfähigkeitsraum Region 1
- $\sigma_1$ : spezifische elektrische Leitfähigkeit Region 1

werden zur Beschreibung des Volumenleiters und der Sensorpositionen benutzt [Van Uiter 2004].

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 13

## Endlich ausgedehnter Volumenleiter

Das biologische Objekt ist natürlich kein unendlich ausgedehnter Leiter, sondern besteht aus einer endlichen Anzahl verschieden leitfähiger Gebiete. Betrachtet man den Körper dementsprechend in verschieden leitfähige Regionen  $G_i$  mit den Leitfähigkeiten  $\sigma_i$ ,

so ergibt sich für das Potential an den Grenzflächen unterschiedlicher Leitfähigkeiten

die Identität:

$$\varphi_n = \varphi_{n+1}$$


Dieses Grenzflächenpotential ist die einzige Lösung für unter folgenden Randbedingungen:

$$\sigma_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \sigma_{n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial n}$$

An den äußeren Grenzen (zwischen biologischem Gewebe und Luft) gilt:

$$\sigma_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0$$

da kein Strom das biologische Gewebe verlassen kann.



RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 14

## Volumenleitermodell

1. Zylinder mit homogener Leitfähigkeit
2. Realistische äußere Körperform mit homogener Leitfähigkeit
3. Realistische äußere Körperform mit isotroper Leitfähigkeit
4. Realistische äußere Körperform mit anisotroper Leitfähigkeit

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 15

## Phantomaufbau

The localization of focal heart activity via body surface potential measurements 5399

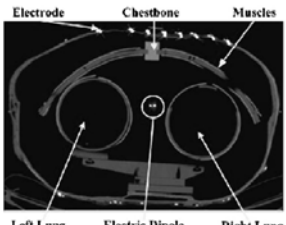



Figure 2. An axial CT-slice through the phantom's setup showing the lung and muscle compartments, as well as one line of the electrode array and one electric dipole.

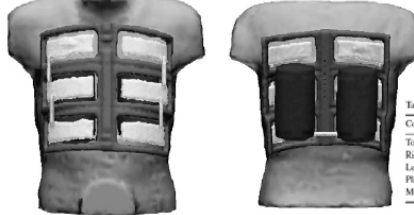


RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 16

## Randelementemethode

- homogene Leitfähigkeit innerhalb eines Gebietes
- Jede Leitfähigkeitsregion muss in eine andere Leitfähigkeitsregion eingelassen sein (Matroschkaprinzip)

→ ausserhalb der Knochen kann entweder Körper- oder Muskelleitfähigkeit anschließen (teilweise unrealistisch)



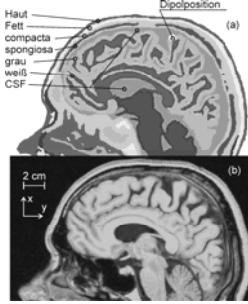
Compartment	Number of triangles	Side length (mm)
Torso	8710	12
Right lung	2036	8
Left lung	2024	8
Plastic frame	9896	4
Muscles	7684	4

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 17

## Finite Elemente Methode

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \sigma_z \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

- Leitfähigkeitstensen in jedem Raumpunkt (anisotrope Leitfähigkeiten möglich)
- Sehr realistisch, aber rechenaufwändig



RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 18

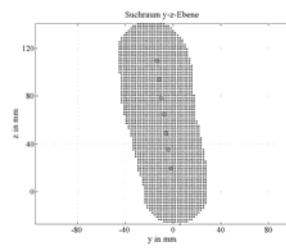
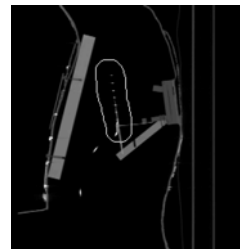
## Quellenmodell

1. fokale Quellenmodelle
  - Einzeldipol (äquivalenter Dipol)
  - Multiple (wenige) Dipole
  - Multipole
2. verteilte Quellenmodelle
  - Dipolverteilungen
  - Flächen- und Volumenquellen
  - Potentialschichten (z.B. so genannte Spannungsdoppelschichte)

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 19

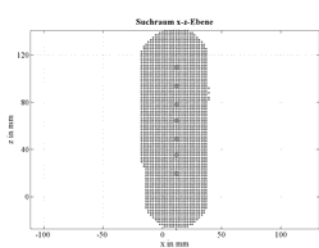

## Suchraum (sagittal)

- Die Positionen möglicher Dipolquellen werden auf einen ‚sinnvollen‘ Bereich festgelegt.
- Der Suchraum wird diskretisiert

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 20

## Suchraum (coronar)





Weitere Restriktionen:  
Die Ausrichtung möglicher Dipolquellen wird in Abhängigkeit der Ausrichtung der Nervenbahnen festgelegt.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 21

## Oberflächenpotentiale

Gegeben ist eine räumlich zeitliche  $m \times n$  Messmatrix  $F$  (Def. 3-1), deren Spalten repräsentieren die Potentiale an  $m$  Sensorpositionen, als ein  $m \times 1$  Vektor. Die Zeilen enthalten die Potentiale einer Sensorposition über  $n$  Abtastwerte.


$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}$$


RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 22

## Vorwärtslösung: Quellraum

2. Normalisiertes Dipolmoment

- Drei Ausrichtungen jeweils entlang x, y, und z.



$$S = \begin{pmatrix} S_{11x} & S_{12x} & \dots & S_{1nx} \\ S_{11y} & S_{12y} & \dots & S_{1ny} \\ S_{11z} & S_{12z} & \dots & S_{1nz} \\ S_{21x} & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{21y} & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{21z} & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{p1x} & S_{p2x} & \dots & S_{pnx} \\ S_{p1y} & S_{p2y} & \dots & S_{pny} \\ S_{p1z} & S_{p2z} & \dots & S_{pnz} \end{pmatrix}$$


Parametervektor der Quelle als  $3 \times n$  Matrix  $S$  definiert, wobei  $p$  die Suchraumposition und  $n$  die Anzahl der Zeitpunkte angibt

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 23

## Vorwärtslösung: Leadfieldmatrix

Eine Berechnung nach der Integralgleichung ist natürlich sehr aufwendig. Für jede Quellenposition und Orientierung diese Integralgleichung zu lösen, erfordert noch viel längere Berechnungszeiten. Deshalb definiert man als drittes die  $m \times 3p$  Übertragungsmatrix  $L$  (engl. Leadfield matrix). Sie enthält die auf 1 normierten Vorwärtslösungen für die 3 orthogonalen Orientierungsparameter (die Orientierung wird als quasilinear betrachtet) in allen  $p$  nichtlinearen Positionen.

Die Übertragungsmatrix wird mit Hilfe der Randelementemethode berechnet.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11x} & l_{11y} & l_{11z} & l_{12x} & l_{12y} & l_{12z} & \dots & l_{1px} & l_{1py} & l_{1pz} \\ l_{21x} & l_{21y} & l_{21z} & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1x} & l_{m1y} & l_{m1z} & \dots & \dots & \dots & \dots & l_{mpx} & l_{mpy} & l_{mpz} \end{pmatrix}$$



RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 24

## Vorwärtslösung: Lösungsgleichung

Vereinfacht kann durch die Multiplikation der Übertragungsmatrix  $L$  mit beliebigen Quellenparametern  $S$  jede mögliche Vorwärtslösung errechnet werden, ohne dafür die Integralgleichung lösen zu müssen:

$$\vec{F}(r, \vec{o}) = L \cdot S$$

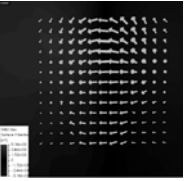
Würde man im Punkt 1 einen Dipol berechnen, der nur ein Moment von 1 in x-Richtung hätte, dann würde man die erste Spalte der Übertragungsmatrix  $L$  als Lösung erhalten.

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11x} & l_{11y} & l_{11z} & l_{12x} & l_{12y} & l_{12z} & \dots & l_{1px} & l_{1py} & l_{1pz} \\ l_{21x} & l_{21y} & l_{21z} & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1x} & l_{m1y} & l_{m1z} & \dots & \dots & \dots & \dots & l_{mpx} & l_{mpy} & l_{mpz} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11x} & s_{11y} & s_{11z} & \dots & s_{1nx} \\ s_{12x} & s_{12y} & s_{12z} & \dots & s_{1ny} \\ s_{21x} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{21y} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{21z} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{p1x} & s_{p1y} & s_{p1z} & \dots & s_{pnx} \\ s_{p2x} & s_{p2y} & s_{p2z} & \dots & s_{pny} \\ s_{pnx} & s_{pny} & \dots & \dots & s_{pnz} \end{pmatrix}$$


RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 25

## Suchverfahren I: Gewichtetes Minimum Norm Verfahren

Das **GEWICHTETE MINIMUM NORM (WMN, engl.: weighted)** Verfahren wird benutzt, um verteilte Quellen zu berechnen. In jedem möglichen Punkt, in dem eine Quelle sein könnte (Gitternetz vom Quellenraum), sucht dieser Algorithmus nach den passenden Parametern. Die Zielfunktion besteht hierbei aus der quadratischen Norm der Vorwärtslösung, bestehend aus den kumulierten Vorwärtslösungen der Einzeldipole über den ganzen Quellenraum minus dem gemessenen Feldvektor  $f$  (eine Spalte aus der Messmatrix  $F$  zum Zeitpunkt  $n$ ):



$$\Delta^2 = \left\| \vec{F}(r, \vec{o}) - \vec{f} \right\|^2$$

Abbildung 3.4: Das Minimum Norm Verfahren bestimmt für jede mögliche Dipolposition die Parameter, die die quadratische Norm, gebildet aus der Differenz von Vorwärtslösung und den Messwerten, minimieren. Deshalb enthält dessen Lösung so viele Dipole, wie der Quellenraum Punkte hat. In diesem Fall lag die Quelle im oberen Bildausschnitt zwischen den Potentialextrema.

Als Ergebnis erhält man so viele Dipole, wie Gitternetzpunkte. Die Dipolmomente sind dabei variabel, unterscheiden sich in Orientierung und Amplitude. Die größten Dipole befinden sich im Bereich der wahren Quelle.

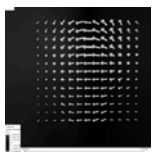
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 26

## Suchverfahren I: Gewichtetes Minimum Norm Verfahren

Fügt man einen zusätzlichen Regularisierungsterm hinzu, so folgt die gewichtete Minimum Norm Lösung:

$$\Delta^2 = \left\| L \cdot \vec{s} - \vec{f} \right\|^2 + \lambda \cdot \left\| W \cdot \vec{s} \right\|^2$$

Es ist notwendig einen Regularisierungsfaktor  $\lambda$  einzufügen, über den der Einfluss des gesamten Regularisierungsterms geregelt werden kann. Die Wichtungsmatrix  $W$  erlaubt es zusätzliche Bedingungen in die Gleichung einfließen zu lassen, so zum Beispiel die Wichtung der Quellentiefe. Es gibt verschiedene Normen, die sich in der Zahl der Potenz  $p$ , für  $1 < p < \infty$  unterscheiden. In ist demzufolge die L2-Norm notiert.



RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 27

## Suchverfahren II: Räumlich-Zeitliche Verfahren (Multiple Signal Klassifikation)

Problem: Verfahren, die die zeitliche Information vernachlässigen, können nur schlecht zwischen zeitlich unkorrelierten Quellen unterscheiden.

Wird die gemessene Potentialverteilung von mehr als nur einer Quelle generiert, kann die Suche nach einzelnen Dipolen nicht mehr zum Erfolg führen. Man klassifiziert deshalb die Signale (MUSIC, engl.: Multiple Signal Classification) und lokalisiert danach erst die Dipole aus den separierten Feldverteilungen. Dazu wird die Singulärwertzerlegung als räumlich zeitlicher Filter benutzt, um die Messmatrix  $F$  in zeitlich und räumlich orthogonale Unterräume zu zerlegen, insofern differenzierbare Komponenten enthalten sind.

Signaltheoretisch setzt sich die reale Messwertmatrix  $F$  aus einem Signal- und einem Rauschanteil ( $m \times n$  Fehlermatrix) zusammen.

$$F = L \cdot S + E$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & \dots & l_{1m} & l_{1n} & l_{1p} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & \dots & l_{2m} & l_{2n} & l_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \dots & l_{mm} & l_{mn} & l_{mp} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 28

## Suchverfahren II: MUSIC - Autokorrelationsmatrix

Nimmt man an, das Rauschen sei Nullsymmetrisch und über alle Frequenzen gleich verteilt (weißes Rauschen), ergibt sich der Erwartungswert  $E\{FF^T\}$  des Skalarprodukts  $FF^T$  als

$$R_F = E\{FF^T\} = E\{(L \cdot S + E)(L \cdot S + E)^T\} \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$= L \cdot E\{S \cdot S^T\} L^T + L \cdot E\{S \cdot E\} + E\{E \cdot S^T\} \cdot L^T + E\{E \cdot E^T\}$$

Da die Fehlermatrix unkorreliert gegenüber der Signalmatrix ist, muss der Erwartungswert des Skalarprodukts zwischen beiden Null sein:

$$E\{S \cdot E\} = 0 \quad E\{E \cdot S^T\} = 0 \quad \sum_{i=1}^n E\{E \cdot E^T\} = n \cdot \sigma_e^2 \cdot I$$

$\sigma_e^2$  .. Kovarianz des Rauschanteils  
I .. Einheitsmatrix

Autokorrelationsmatrix:  $R_F = L \cdot S \cdot S^T \cdot L^T + n \cdot \sigma_e^2 \cdot I$

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 29

## Suchverfahren II: MUSIC - Singulärwertzerlegung

In den folgenden Erläuterungen ist der Signalunterraum  $U_s$  die rechteitig transformierte und linksseitige Orthonormalmatrix der singulär zerlegten Signalkorrelationsmatrix:

$$L \cdot S \cdot S^T \cdot L^T = U_s \Sigma_s U_s^T$$

Gleichfalls ist der Rauschunterraum  $U_e$  als rechtsseitig transformierte und linksseitige Orthonormalmatrix der singulär zerlegten Rauschkorrelationsmatrix definiert:

$$n \cdot \sigma_e^2 \cdot I = U_e \Sigma_e U_e^T$$

Singulärwertzerlegung der Autokorrelationsmatrix:

$$R_F = E\{FF^T\} = [U_s U_e] \begin{bmatrix} \Lambda + \sigma_e^2 I & 0 \\ 0 & \Lambda + \sigma_e^2 I \end{bmatrix} [U_s U_e]^T$$

$\Lambda$  .. Diagonalmatrix ist, welche die Singulärwerte enthält.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 30

## SVD

Die Singulärwertzerlegung, auch Hauptkomponentenanalyse, ist eine zweidimensionale orthogonale Zerlegungsmethode. Sie zerlegt eine  $m \times n$  Matrix  $F$  in eine linksseitige  $m \times m$  Matrix  $U$  und eine rechtsseitig  $n \times n$  Matrix  $V$ , sowie in eine diagonale  $m \times n$  Singulärwertmatrix

$$SVD(F) = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

Die linksseitige  $m \times m$  Matrix  $U$  enthält  $r$  linear unabhängige orthonormierte Spalten.

Der Rang  $r$  der Matrix  $F$  ist die Anzahl der von Null verschiedenen Singulärwerte in  $\Sigma$  und gibt die Anzahl der  $r$  unabhängigen Basisvektoren an.

$\Sigma$  ist eine Diagonalmatrix, die die jeweiligen Singulärwerte in absteigender Reihenfolge enthält. Die  $r$  Singulärwerte der Matrix  $F$  sind der konstante Faktor zwischen linksseitiger und rechtsseitiger  $r$ -ter Komponente.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 31

## Beispiel: EKG-Bildgebung

Orthogonal Unterräume des Messsignals

$SVD(F) = U \cdot \Sigma \cdot V'$

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 32

## Suchverfahren II: MUSIC - Ansatz

Die Schrittfolge, mit der MUSIC die Quellparameter berechnet lautet:

- Aufstellen einer räumlich zeitlichen Matrix  $F$ , die Messwertmatrix mit  $n$  Abtastwerten und  $m$  Sensoren.
- Zerlegung der aus  $F$  gebildeten Korrelationsmatrix  $FF^T$  mittels Singulärwert Zerlegung.
- Wahl des Signalunterraums  $U_s$  (Man bestimmt den Rang der Messwertmatrix durch die Anzahl der  $r$  von Null verschiedenen Singulärwerte. Zerlegt man reale Messmatrizen, so sind die Singulärwerte niedriger Ranges –weil weiter rechts stehend in der Singulärwertmatrix– größer als Null. Die Amplitude ist für den Signalausraum  $U_s$  aber kleiner, als das Signal Rausch Verhältnis. Demnach sollte der Rang des Signalunterraums die Anzahl der Singulärwerte sein, deren Amplitude größer, als das Signalausverhältnis ist.)
- Aufstellen eines relativ dichten Gitters möglicher Dipolpositionen. In jedem Gitterpunkt wird dann die Vorwärtslösung berechnet.
 
$$\{c_1, c_2, \dots\} = subcorr(L, U_s)$$
- Berechnung der Unterraumkorrelation zwischen den Teillösungen in  $L$  und dem Signalunterraum  $U_s$ :

Der klassische MUSIC sucht demnach nur nach einer Quelle pro Signalunterraumkomponente, deren Punkt für den betrachteten Zeitbereich fixiert ist, nur deren Dipolmoment sich um  $180^\circ$  drehen kann.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 33

## Unterraumkorrelation

The localization of focal heart activity via body surface potential measurements 5401

**Figure 5.** The source space framed with a yellow line comprises the region of possibly reconstructable dipole sources. The results below are represented in the same (a) coronal and (b) sagittal slices, but zoomed into the region of the source space. (c) The subspace correlation spectrum for two uncorrelated dipoles 1 and 7 plotted into the sagittal slice of source space. The local maximum for dipole 7 was wider spread than for dipole 1 due to its deeper position inside the phantom.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 34

## Lokalisationsgenauigkeit: Einzeldipole

5404 F Westerting et al

Dipole	Position (mm)	Angular Deviation (°)	Subspace Correlation
1	10.5	0.1	0.9985
2	7.0	12.0	0.9978
3	6.1	13.7	0.9978
4	5.6	0.1	0.9982
5	2.6	0.1	0.9987
6	5.9	0.0	0.9998
7	5.6	0.0	0.9990

**Figure 6.** The localization result for seven single dipoles, of which each was switched on and off one after the other. The localized dipole positions were plotted into the s-ray CT images (left: coronal slices; right: sagittal slice). Crossed circles indicate the computed position and arrows point to the activated dipole. The localization error for dipoles 1 to 3 was primarily a depth error. The plastic frame and the membrane of the lung compartments are labelled in the coronal image. The plastic bar on which the music compartments were plugged is labelled in the sagittal image. The quantitative results of positioning error, angular deviation and subspace correlation are listed next to each dipole.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 35

## Lokalisationsgenauigkeit: Zwei Dipole

Configuration	Dipole 1 Position (mm)	Dipole 1 Angle (°)	Dipole 1 Correlation	Dipole 2 Position (mm)	Dipole 2 Angle (°)	Dipole 2 Correlation
1	16.2	49.4	0.9978	20.5	16.1	0.9976
2	16.7	12.2	0.9961	12.5	20.3	0.9970
3	11.6	4.1	0.9978	15.8	5.1	0.9972
4	5.5	4.9	0.9990	8.9	3.6	0.9991
5	8.9	2.3	0.9992	12.0	0.6	0.9990
6	18.9	4.4	0.9991	5.5	4.9	0.9990

**Figure 7.** The localization error for six configurations of two uncorrelated dipoles (left: coronal slices; right: sagittal slice). The localization error for dipole 7 (black markers) increased with dipole proximity.

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westerting  
6/20/2011 | Page 36

## Einzeldipole während unkorrelierter Dipolaktivität zweier korrelierter Dipole

The localization of focal heart activity via body surface potential measurements 5405

Dipole	Position (mm)	Angular Deviation (°)	Subspace Correlation
1	11.5	39.7	0.9982
2	15.0	13.2	0.9990
3	6.4	3.6	0.9992

**Figure 8.** The localization errors for three single dipoles (positions shown), which were accompanied by a pair of two correlated dipoles (left: coronal slices; right: sagittal slice).

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 37

## Lokalisationsgenauigkeit: Test am Phantom

S411

The localization of focal heart activity via body surface potential measurements

Table 2. Localization results for dipoles 1 to 7 as computed from measured sets of single, two and three dipoles.

Set	Analyzed dipoles	Accompanying dipoles	Localization error (mm)	Angular error (°)	Subspace contribution (%)	Grid error (mm)	
One dipole	1 (20 Hz)	-	16.5	0.1	99.80	2.0	
	2 (20 Hz)	-	7.0	12	99.78	1.9	
	3 (20 Hz)	-	6.3	13.3	99.76	6.0	
	4 (20 Hz)	-	5.6	0.1	99.82	2.7	
	5 (20 Hz)	-	2.8	0.1	99.87	0.1	
	6 (20 Hz)	-	5.9	0	99.89	1.9	
	7 (20 Hz)	-	5.6	0	99.90	1.9	
Mean ± STD							6.2 ± 2.3
Two dipoles	1 (20 Hz)	7 (30 Hz)	16.2	49.4	99.78		
	2 (20 Hz)	7 (30 Hz)	20.5	18.1	99.76		
	3 (20 Hz)	7 (30 Hz)	16.7	12.1	99.60		
	4 (20 Hz)	7 (30 Hz)	12.5	20.5	99.70		
	5 (20 Hz)	7 (30 Hz)	11.6	4.1	99.78		
	6 (20 Hz)	7 (30 Hz)	15.8	5.1	99.72		
	Mean ± STD						
Two dipoles	7 (30 Hz)	1 (20 Hz)	5.5	4.9	99.90		
	7 (30 Hz)	2 (20 Hz)	8.9	3.6	99.91		
	7 (30 Hz)	3 (20 Hz)	8.9	2.5	99.92		
	7 (30 Hz)	4 (20 Hz)	12.5	22.2	99.82		
	7 (30 Hz)	5 (20 Hz)	12.0	0.8	99.90		
	7 (30 Hz)	6 (20 Hz)	18.0	4.4	99.91		
	Mean ± STD						
Three dipoles	1 (20 Hz)	4 and 7 (30 Hz)	11.5	16.7	99.82		
	4 (20 Hz)	1 and 7 (30 Hz)	15.0	15.2	99.90		
	7 (20 Hz)	1 and 4 (30 Hz)	6.4	3.6	99.92		
	Mean ± STD						

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 38

## Lokalisationsgenauigkeit: Fehler durch Diskretisierung des Suchraums

F Westering et al

**Figure 9.** The inherent grid error computed as the nearest grid point (blue) to each of the seven dipole sources (white sticks). The values in mm indicate the 3D difference between the physical dipole position and the closest grid point of the source space (left: coronal slice; right: sagittal slice).

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 39

## Fehler der Vorwärtsrechnung ist schwer Abschätzbar (→ Fehlerquelle)

Angenommenes Modell:

$$V = L \cdot S + E$$

versus

$$V^{m \times n} = \begin{pmatrix} m \times 3p & m \times 3p \end{pmatrix} \cdot S^{3p \times n} + E_N^{m \times n}$$

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 40

## Berechnung der Herzmuskelaktivität aus magnetischen Messdaten

**Abbildung 10.10:** Blick von unten auf den Torso (3-D MRT) (a), magnetisches QRS Signal (b), magnetisches Spätfeld (LP) Signal (c), Rekonstruktion der elektrischen Herzaktivität (linker Ventrikel) des QRS (d) und LP (e). In (b) und (c) sind die analysierten Zeitbereiche grau dargestellt. Die Farblosierung in (d) und (e) zeigt die maximale Dipolstärke an jedem Ort, wobei QRS und LP unterschiedlich sind. Im apikalen Bereich (Aneurysma) ist die elektrische Aktivität (Stromdichteverteilung) für QRS und LP entgegengesetzt.

Aus: Numerische Berechnung und Analyse biomagnetischer Felder, Habilitationsschrift 2002, Prof. Dr. Jeroen Hausman, Institut für Biomedizinische Technik Universität Erlangen

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 41

## Potentielle Anwendungen

Neurologie	Kardiologie
<ul style="list-style-type: none"> <li>Epilepsie,</li> <li>Morbus Alzheimer,</li> <li>Parkinson Syndrom, Schizophrenie,</li> <li>Manie, Depression, Phobie,</li> <li>neurologisch bedingte Seh- und Hörstörungen,</li> <li>Tinnitus,</li> <li>Ischämie und Stenosen,</li> <li>funktionelle Störungen nach Hirnverletzungen oder Schlaganfall,</li> <li>Schmerz, Neuralgie, Migräne,</li> <li>Abbildung der sensorischen Areale vor Operationen,</li> <li>Multiple Sklerose.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Wolff-Parkinson-White Syndrom, ventrikuläre bzw atriale Tachykardie, geführte RF-Ablation mit dem Herzkatheter</li> <li>Infarkt Klassifikation, Quantifizierung der Abstoßungsreaktion an transplantierten Herzen.</li> </ul>

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
Computer Assisted Clinical Medicine  
Dr. Friedrich Westering  
6/20/2011 | Page 42

## Zusammenfassung

1. Elektrodenfelder ermöglichen die räumlich aufgelöste Messung von Oberflächenpotentialen
2. Quellenposition kann aus räumlich zeitlich aufgelösten Messwerten rekonstruiert werden (inverses Problem)
3. A-Priori Information wird benötigt (Quellmodell, Volumenleitermodell, Suchraumschränkung)
4. Minimum-Norm-Verfahren
5. Multiple Signal Klassifikation
6. Potentielle Applikationen